合成関数の微分公式の証明

合成関数の微分公式

$u=f(x)$, $y=g(u)=g\{f(x)\}$ とすると, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

証明

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to0}\frac{g\{f(x+h)\}-g\{f(x)\}}{(x+h)-x}\\
&=\lim_{h\to0}\left(\frac{g\{f(x+h)\}-g\{f(x)\}}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)
\end{aligned}
$$

ここで, $f(x+h)-f(x)=k$ とおくと, $h\to0\Rightarrow k\to0$, $f(x+h)=f(x)+k$ より,

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}&=\lim_{h\to0}\left(\frac{g\{f(x+h)\}-g\{f(x)\}}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\\
&=\lim_{k\to0}\frac{g\{f(x)+k\}-g\{f(x)\}}{k}\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\lim_{k\to0}\frac{g(u+k)-g(u)}{k}\cdot\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}
\end{aligned}
$$